Faber Castell 1080

Combinador de Funciones



Jose G. Fernández - 09-11-2026

Faber Castell 1080: El Combinador de Funciones

1 Introducción

Su nombre real es «Funktionenschieber» y, tras consultar su manual [1], lo he traducido como «combinador de funciones». Va dentro de una caja de madera de 63,5 x 43,5 x 8 cm (su superficie es algo mayor que el formato DIN-A2). La caja sirve, además, como base y estructura para el aparato.

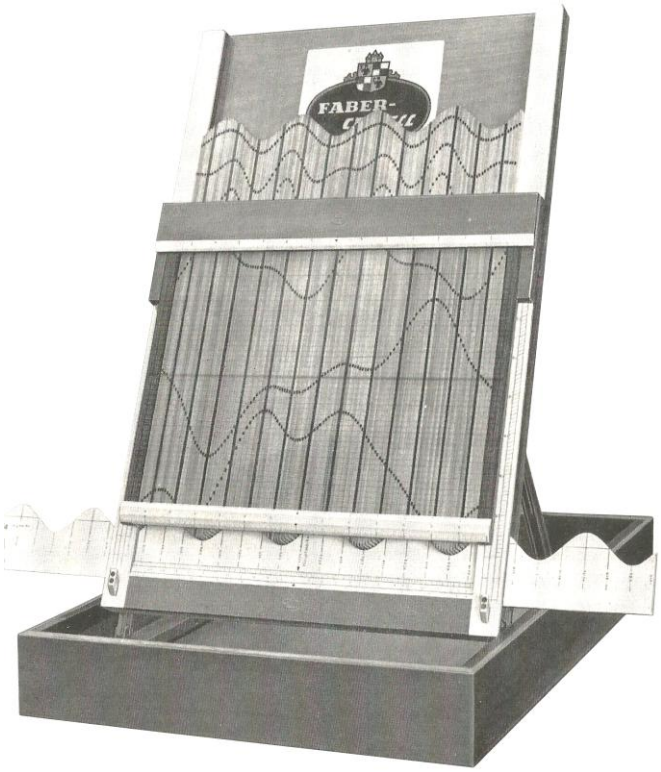


Foto del aparato en el manual



Foto de mi aparato

Debajo de la tapa de la caja, quedando sobre ésta al abrirla, hay un conjunto de listones finos de madera paralelos, que llamaré «**Panel de Lamas**», sobre el que se dibuja un conjunto de funciones, distribuidas a lo largo de sus dos caras, y que está delimitado y contenido por un **Marco en** forma de **"U"**. La imagen anterior izquierda muestra la cara A del Panel de Lamas, y éste está desplazado siguiendo la forma de la **Plantilla de Oscilación** puesta debajo. La imagen anterior derecha muestra la cara B con el **Listón Base** debajo. Sobre el Panel de Lamas se sitúa un **Cursor** que desliza verticalmente sobre Marco. El manual denomina al dispositivo «aparato de demostración y cálculo». He traducido el manual al inglés y lo que presento a continuación es un resumen de sus 50 páginas (en formato DIN A5) y 16 ilustraciones.

2 El Diseñador y la Vida del Producto

El manual atribuye el diseño al Prof. Dr. Th. Marzani, en una fecha anterior a abril de 1954 (según se indica en su preámbulo). Por lo que deduzco, se trataba de un profesor en la Escuela Federal de Oficios (Bundesgewerbeschule) de Villach, población al sur de Austria.

En cuanto al aparato, en la carta de presentación del catálogo de Faber-Castell, fechada el 22 de enero de 1954 [2], se menciona que ya figura en el catálogo, si bien se aclara que «el aparato aún no está disponible». Posteriormente, en el boletín informativo n.º 14 de Faber-Castell, de 1971 [3], todavía se hace referencia a este instrumento. Por tanto, estuvo comercializándose al menos durante 17 años.

3 Propósito

"*El Combinador de Funciones está diseñado principalmente como aparato de enseñanza para centros educativos de todos los niveles y para talleres de formación*" [1].

El manual consta de dos partes: la A (que es la que poseo) y la B, la cual no he llegado a ver. Respecto a esta Parte B, en la parte A se menciona lo siguiente:

"*Si existe suficiente interés tenemos previsto publicar una Parte B con instrucciones adicionales, ya que el Combinador de Funciones no pretende ser solo un instrumento de enseñanza, sino también una herramienta de cálculo para matemáticos, científicos y técnicos*" [1].

En cuanto a la Parte A, ésta está estructurada "*teniendo en cuenta, en lo posible, las necesidades de los distintos niveles educativos*" [1]. En este sentido, el orden de los capítulos guarda relación con los diferentes niveles académicos; por tanto, las funciones matemáticas solo se tratan en los últimos capítulos.

4 Necesidad del Equipo

En [4] se hace referencia a este instrumento como un primer ejemplo de la incorporación a las aulas de la "interacción entre funciones". Tal como se explica en [4], aprender a trabajar con funciones forma parte de la educación matemática, lo cual requiere aprender a pensar en términos de funciones. De este modo, a principios del siglo XX, la educación matemática básica comenzó a integrar el "pensamiento funcional" junto a la aritmética y la geometría.

Sin embargo, "*su implementación en el aula se vio obstaculizada durante mucho tiempo por la falta de entornos de aprendizaje adecuados*" [4]. El diseño del Dr. Marzani se basaba en "*la constatación de que los modelos de enseñanza rígidos no contribuyen mucho al pensamiento dinámico y, por tanto, deben complementarse con modelos móviles, que no solo muestran cómo es algo, sino que permiten experimentar cómo se transforma*" [4].

5 La Combinación de Funciones

En resumen, este aparato permite la suma gráfica de funciones sinusoidales y lineales, así como su transformación mediante el ajuste de ciertos parámetros. Además, permite hallar gráficamente las raíces de polinomios de hasta cuarto grado. Por un lado, esto facilita la comprensión de las oscilaciones (variación periódica de la posición en función del tiempo) y de las ondas (variación periódica de la posición en función de la distancia). Por otro lado, la comprensión de las raíces (ya sean distintas, iguales o no reales) constituye el punto de partida para el estudio de las funciones matemáticas (máximos, mínimos, pendientes, etc.). Además, la transformación de funciones de dos dimensiones permite estudiar la transformación de las figuras geométricas respectivas.

6 La Caja

La caja está fabricada en madera de 1,5 cm de grosor. La tapa se bloquea con una cerradura con llave.



La caja cerrada y su llave

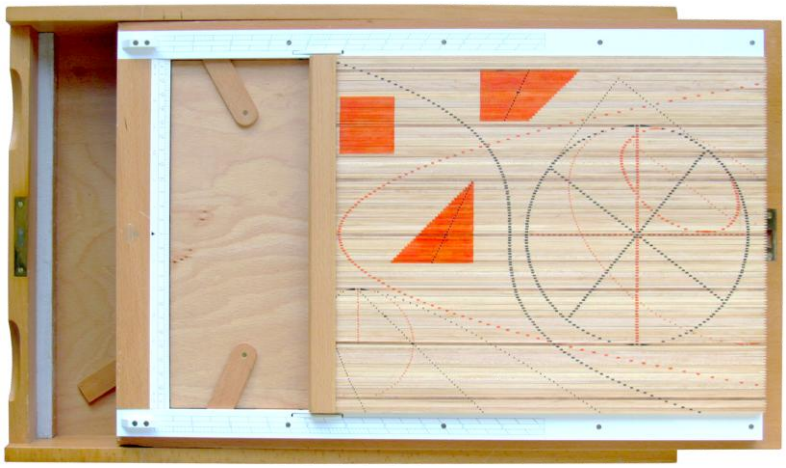
La caja cuenta con cuatro topes de goma que permiten colocarla en posición horizontal; sin embargo, para transportarla, es preferible mantenerla de lado. Por ello, el cierre resulta indispensable para evitar una apertura accidental y que las diversas piezas terminen en el suelo. Aunque las lamas están numeradas, recolocarlas tras un desparrame será lento.

La tapa cuenta con dos pequeños topes metálicos en un extremo que actúan como bisagras laterales. Éstas se insertan en sus respectivas ranuras situadas en las paredes laterales de la base de la caja. La tapa se abre levantándola (junto con el marco en "U", el panel de lamas y el cursor) hasta alcanzar una posición casi horizontal (algo menos de 180º). A continuación, es posible deslizar la tapa a lo largo de las ranuras en la base hasta el extremo opuesto de la caja, sin levantarla hasta completar el deslizamiento, para no chocar con los otros elementos internos.

De hecho, esta posición casi horizontal, con el eje de la tapa situado en dicho extremo opuesto, y la tapa descansando sobre la base de la caja, también está pensada para operar con el aparato.



La caja con la tapa en vertical



La tapa desplazada hasta el extremo opuesto de las ranuras y apoyada

Como se observa en la imagen de la izquierda, dentro de la caja hay un conjunto de tres elementos articulados (dos listones de madera y un par de pletinas metálicas), situados a cada lado de la caja. El primer listón de madera (inferior) permanece fijo, apoyado sobre el fondo de la caja; el segundo listón de madera pivota sobre el primero y sirve de soporte para la tapa, y las pletinas metálicas completan el triángulo de apoyo. En los listones de madera horizontales hay dos ranuras de posicionamiento: una para una inclinación de la tapa de unos 116º y otra para unos 140º. Las siguientes imágenes muestran esta estructura (que solo queda en posición abatida cuando el equipo está cerrado, o bien cuando la tapa se coloca invertida para utilizar el aparato en posición horizontal).





Triángulos de soporte izquierdo y derecho, y las ranuras para deslizar la tapa, en la parte superior de los laterales

Por último, una vez abierta la caja, podemos observar dos elementos que mantienen fijo el Panel de Lamas cuando la caja está cerrada. El primero es una placa de madera (apaisada) que cuenta con una especie de repisa con reborde en su lado superior; se trata de la **Placa de Cierre** (véanse las figuras anteriores de la caja, donde este elemento aparece en su lugar). Cuenta con dos lengüetas para fijarla, que giran para encajar en unas ranuras laterales. Su función es mantener el Panel de Lamas de modo que las puntas superiores de éstas queden cerca del borde de la tapa.

El segundo elemento es una varilla fija, de madera de sección cuadrada, que forma un escalón interno a la pared donde se encuentra la cerradura; su parte superior está recubierta de fieltro gris. De este modo, cuando la tapa se coloca en posición cerrada, los extremos de las lamas se apoyan sobre este escalón de madera, quedando fijadas entre la tapa y dicho escalón. Por el otro extremo, las tiras ya están sujetas por el reborde de la Placa de Cierre.



La Placa de Cierre (frontal y perfil)



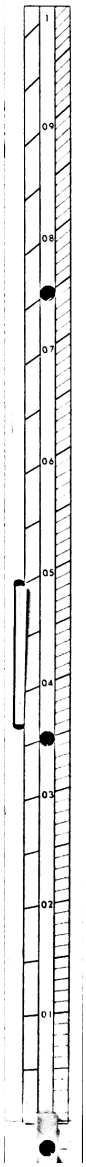
El escalón interior de madera y un triángulo de soporte plegado

Dentro de la caja están las demás piezas del aparato: plantillas, ventanas del cursor, lápices, manual, abrazadera y anexos.

7 El Marco en “U”

En la cara interna de la tapa se encuentra el marco que sostiene los elementos operativos. Tiene forma de U y abarca tres lados de la tapa. Ambos laterales llevan una regla para medir inclinaciones de 0 a 1 (donde 1 equivale a una pendiente de 45º), dividida en centésimas (cada marca representa una pendiente de 0,01). Se trata de las **Escalas de Pendientes**.







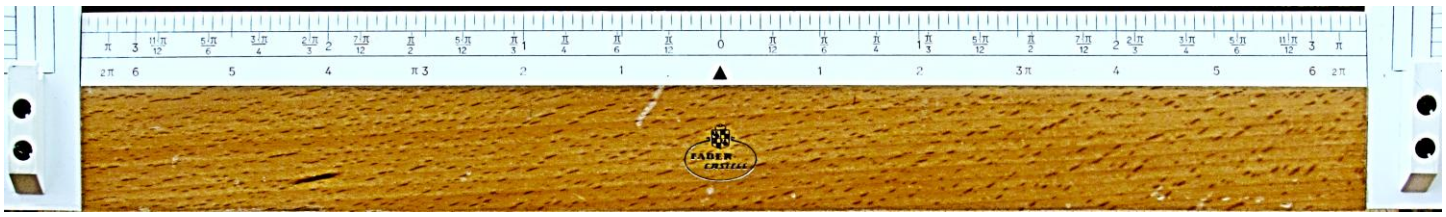
A la izquierda, el Marco en “U” en el interior de la tapa. En el centro, la Escala de Pendientes derecha. A la derecha, detalle lateral con la bisagra, la ranura vertical con la bola de retén bajo la regla, y el Encaje Izquierdo sobre ésta.

En el extremo inicial de cada una de las dos reglas verticales hay un diente fijo para encaje (visibles en imágenes anteriores). Estos son los **Encajes Inferiores** y sirven para colocar el Listón Base sobre la cual se apoyará el Panel de Lamas (tal como se muestra en la imagen inicial a color).

El Listón Base puede desplazarse hacia arriba y bloquearse sobre otro par de encajes, retráctiles y denominados **Encajes Superiores**, situados a media altura de las reglas verticales (en la posición 0,5), lo que permite empujar hacia arriba el Panel de Lamas. Cuando las lamas se encuentran en esta **Posición Superior**, quedan libres dos ranuras verticales situadas debajo de cada una de las reglas verticales, (véase más adelante el apartado “Las Plantillas”).

En su parte inferior, el marco en “U” cuenta con una regla horizontal, la **Regla Inferior**, en la cual la unidad equivale a 5 cm y el origen (el 0) se sitúa en el centro. Esta regla está dividida en intervalos equivalentes a una décima parte de dicha unidad de 5 cm (0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20…). La longitud total de la regla es de aproximadamente 32,8 cm, de modo que la escala esta numerada desde -3,25 hasta 3,25 unidades (con una longitud total que alcanza las ±3,28 unidades).

La regla incluye, además, una segunda numeración con los múltiplos de π/12 (π/12, π/6, π/4… hasta π, y -π/12, -π/6, -π/4… hasta -π). Por último, existe una segunda línea de numeración, en color rojo, que subdivide la “unidad” y se extiende desde 0 hasta ±6,56, señalando los valores de ±π y ±2π.

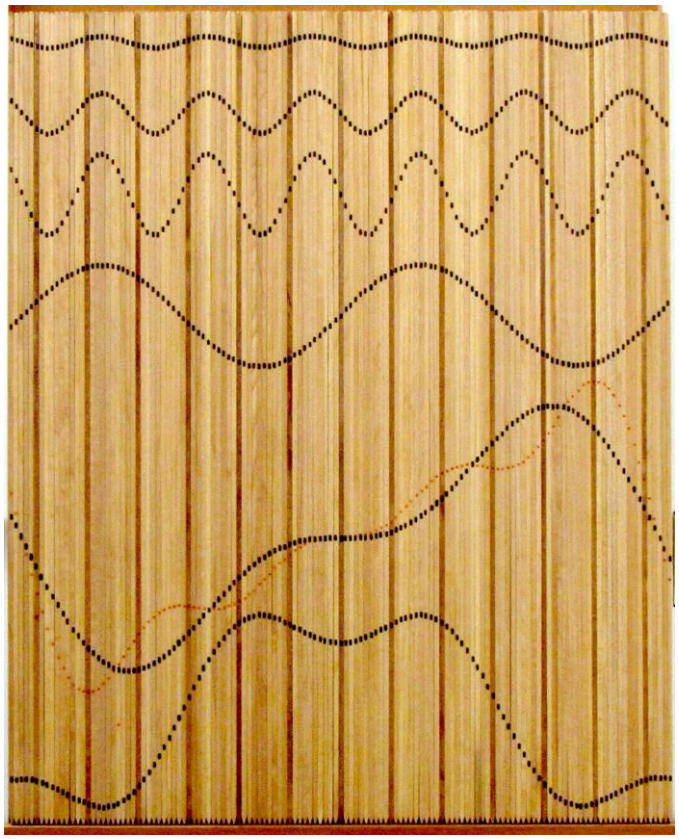


La Regla Inferior, en la base del Marco en “U”

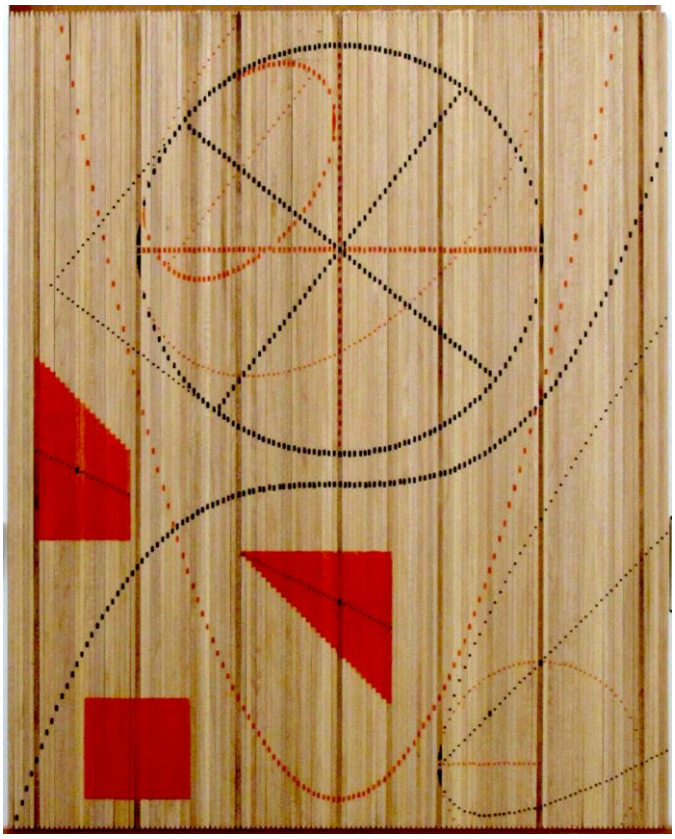
8 El Panel de Lamas

El Marco en “U” contiene 131 listones finos de madera paralelos, cada uno de 40,2 x 2,3 x 0,3 cm (vistos frontalmente: longitud vertical, profundidad y anchura). Sus dos extremos están biselados a lo largo de su profundidad, y en cada uno de los cantos, formando las caras A y B del Panel, hay marcados una serie de puntos que crean el conjunto de curvas en cada cara del Panel.

Los puntos en cada cara son gordos o finos y de color negro o rojo. Además, en la cara B también hay algunas áreas de color rojo. Las tiras están barnizadas, lo que permite utilizar lápices (marcadores para vidrio A.W. Faber-Castell 2251, azules o rojos) y borrar lo marcado cuando sea necesario. Las tiras se mantienen en su posición gracias a la inclinación del aparato (por su peso y la fricción entre ellas). Por tanto, es relativamente sencillo moverlas hacia arriba o hacia abajo.



Cara A del Panel de Lamas



Cara B del Panel de Lamas

Se ve claramente que en la Cara A hay un listón “oscuro” de cada 10, mientras que en la Cara B hay uno cada 20. Así, en la Cara A se marca cada media “unidad” (en distancia horizontal), mientras que en la Cara B se marca cada “unidad”.

9 Funciones en la Cara A del Panel de Lamas

Hay 6 gráficas con puntos negros gordos, y una con puntos rojos finos, correspondientes a las siguientes funciones:

a1	$y = -\frac{1}{18} \text{ sen } 6x$
a2	$y = -\frac{1}{5} \text{ sen } 6x$
a3	$y = -\frac{2}{5} \text{ sen } 6x$
a4	$y = \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$
a5	$y = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{ sen } 2x$
a6	$y = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x$
a7	$y = \text{sen } x - \frac{1}{2} \text{ sen } 2x + \frac{1}{3} \text{ sen } 3x$

Con éstas se muestra el efecto de la combinación de ondas, así como los conceptos de frecuencia, longitud de onda, periodo, fase, armónicos, etc. También se explican las series de Fourier, combinando sus primeros términos.

10 Funciones en la Cara B del Panel de Lamas

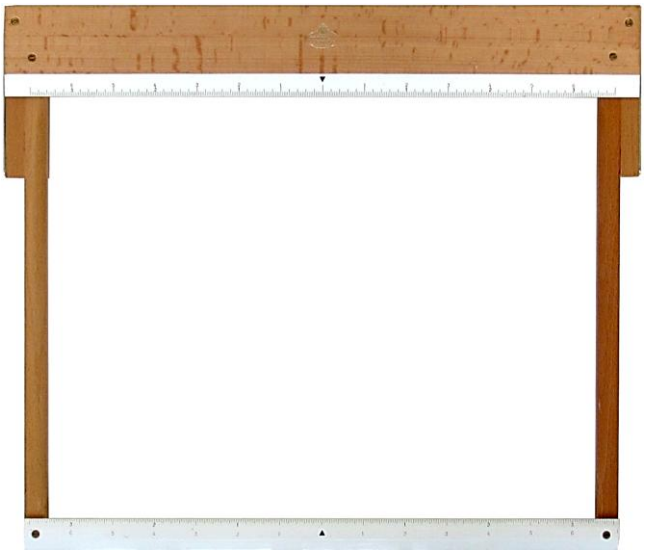
En este lado hay un conjunto de funciones polinómicas y algunas figuras geométricas:

b1	Parábola, con puntos gordos rojos, $y = x^2$
b2	Polinomio de tercer grado, con puntos gordos negros, $y = \frac{x^3}{10}$
b3	Superficie roja de un triángulo rectángulo
b4	Superficie roja de un cuadrado
b5	Superficie roja de un trapecio
b6	Circunferencia, con puntos gordos negros, $x^2 + y^2 = 4$ Elipse tangencial con puntos gordos rojos Diámetros de la circunferencia, en puntos gordos, 2 rojos y 2 negros Diámetro de la elipse en puntos finos rojos Medio cuadrado periférico en puntos finos negros Fragmento de elipse en puntos finos rojos
b7	Parábola inclinada en puntos finos negros Línea inclinada en puntos finos negros Media circunferencia en puntos finos rojos Radio horizontal de la circunferencia en puntos finos rojos

Esta cara B del Panel de Lamas se usa para mostrar las similitudes entre circunferencia y elipse y sus características de transformación. También muestra cómo se transforma una parábola al añadirle una pendiente o desplazarla. Por último, el manual la usa para hallar los ceros o raíces de funciones polinómicas de hasta cuarto grado.

11 El Cursor

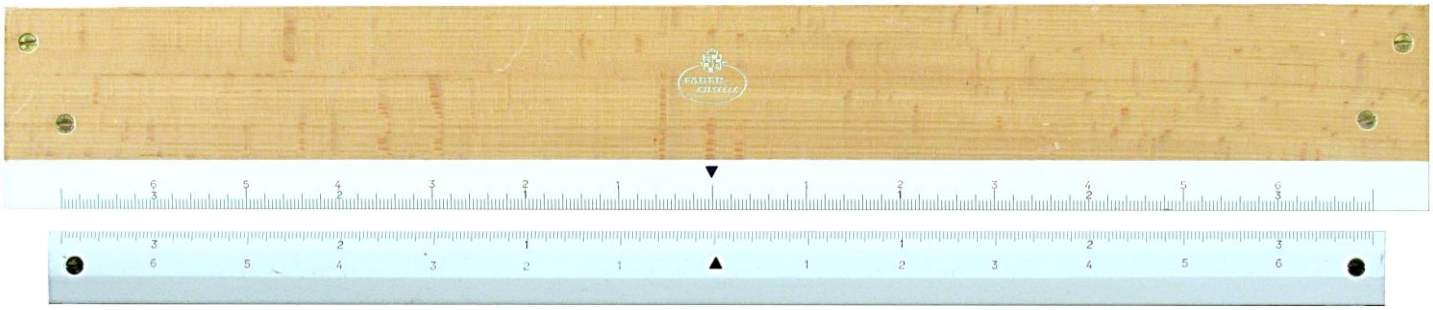
El cursor cubre la superficie del Panel de Lamas y se fija en ranuras verticales situadas en el exterior de los laterales del Marco en “U”. La superficie de la ventana es de 7 x 5 unidades (anchura por altura), algo más ancha que el Panel de Lamas en sí. El cursor se desplaza verticalmente.



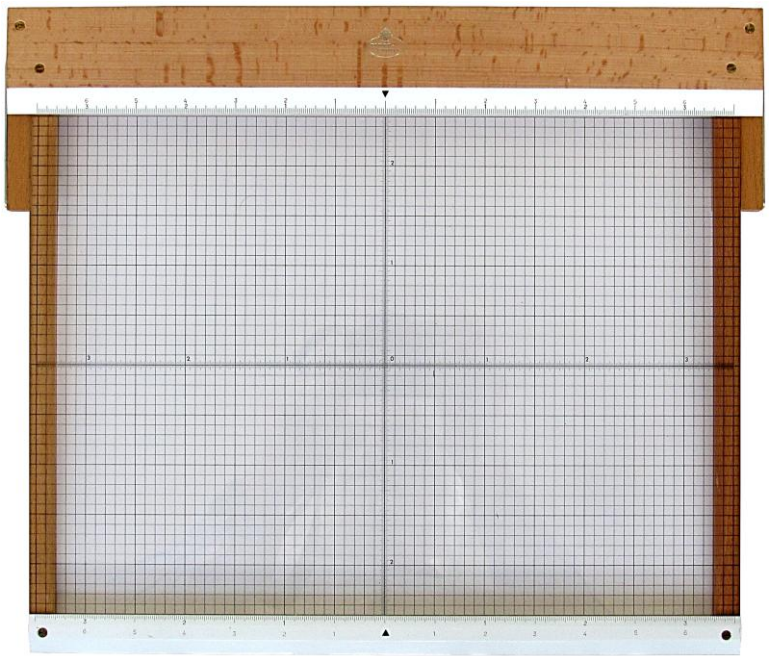


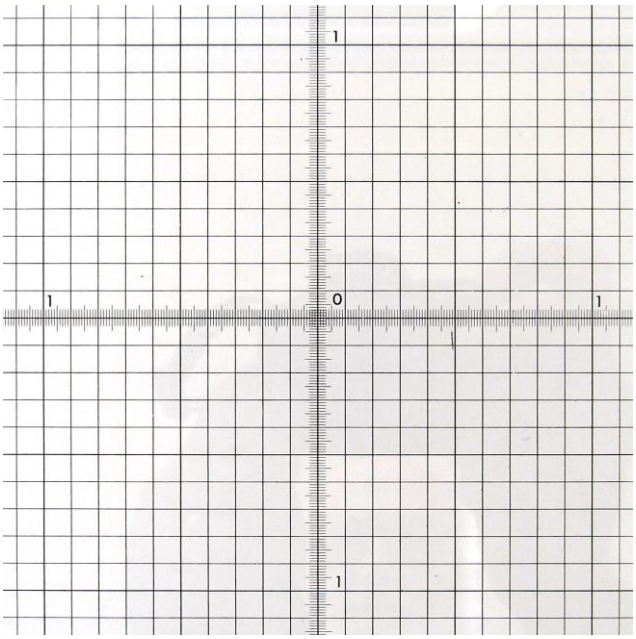


Tiene una regla superior y otra inferior que van de -3,5 a 0 y hasta 3,5, en color negro, y de -7 a 0 y hasta 7, en color rojo. Las marcas en cada una se separan dos centésimas (0; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1…).



Encajando entre las reglas superior e inferior, el cursor lleva un panel cuadriculado transparente, que puede desplazarse horizontalmente, denominado **Ventana de Coordenadas**. La cuadrícula dispone de un par de ejes centrados y marca cada décima de unidad. Sus dos ejes están divididos en centésimas: de -3,5 a 3,5 en sentido horizontal y de -2,5 a 2,5 en sentido vertical.

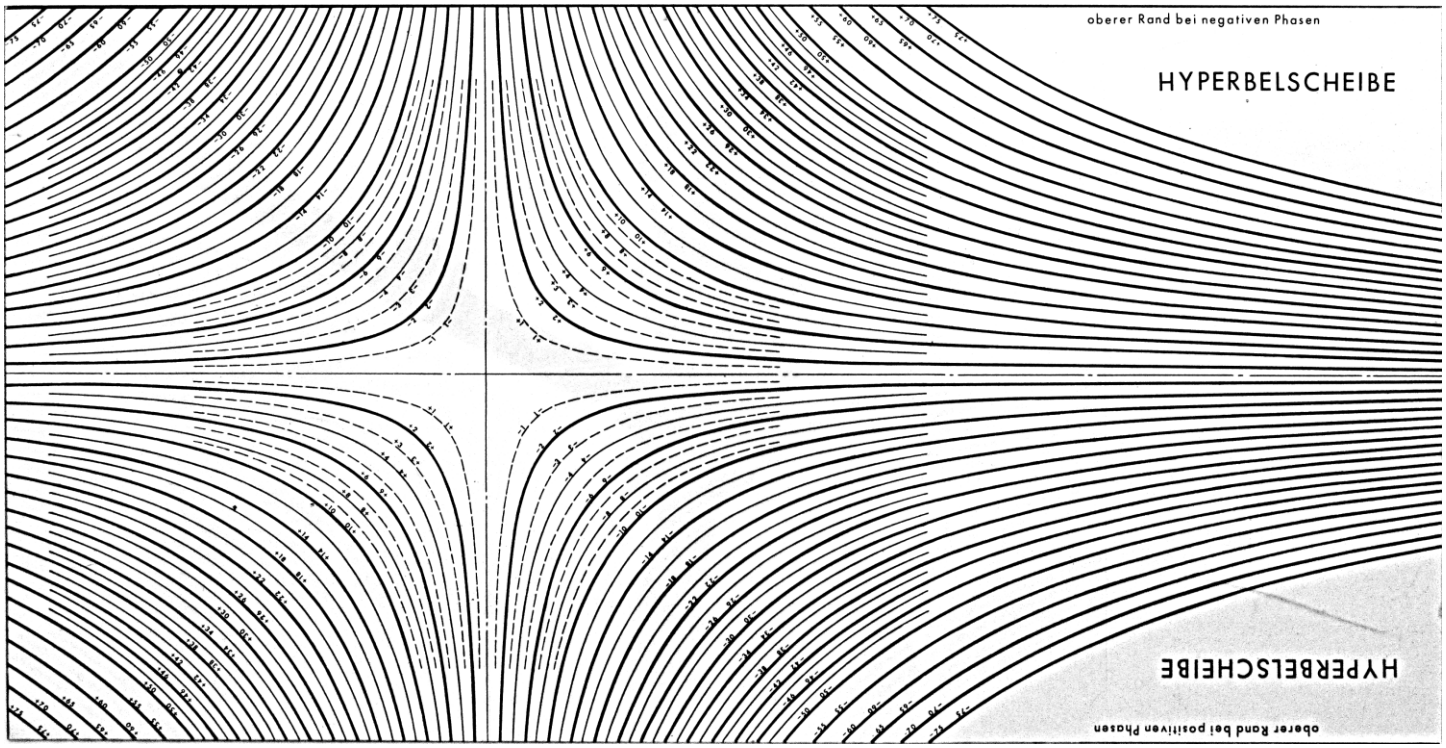


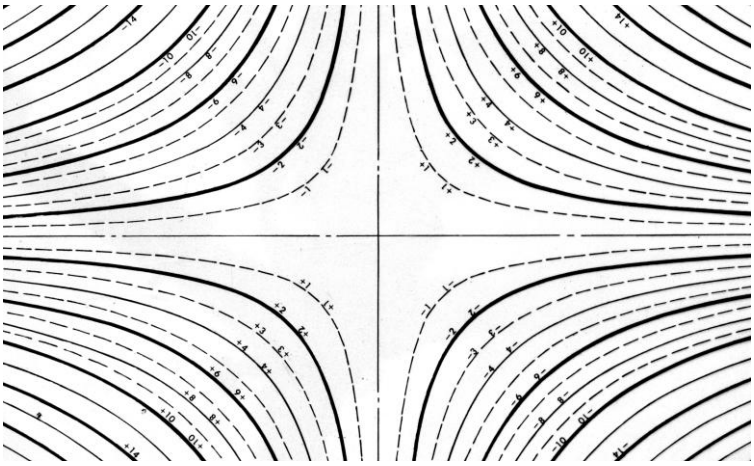


Hay otro panel transparente que se puede sobreponer a la Ventana de Coordenadas, (aunque fuera del encaje en las reglas), denominado **Ventana Hiperbólica**. En éste la retícula está formada por hipérbolas según la función:

$$y = \frac{C}{x - \varphi}$$ (*x* e *y* en “unidades”)

El parámetro C identifica y etiqueta cada hipérbola. La fase φ viene determinada por la posición relativa entre esta retícula y la cuadrícula de la Ventana de Coordenadas. Este panel va etiquetado de modo que se puede usar desde ambas caras.





12 Las Plantillas

El instrumento viene con 5 plantillas que se insertan para desplazar verticalmente el Panel de Lamas según su perfil. Con el Panel de Lamas en la Posición Superior, cualquiera de las plantillas 2 a 4 puede insertarse lateralmente a través de las ranuras verticales situadas debajo de las reglas verticales (izquierda o derecha) del Marco en U.

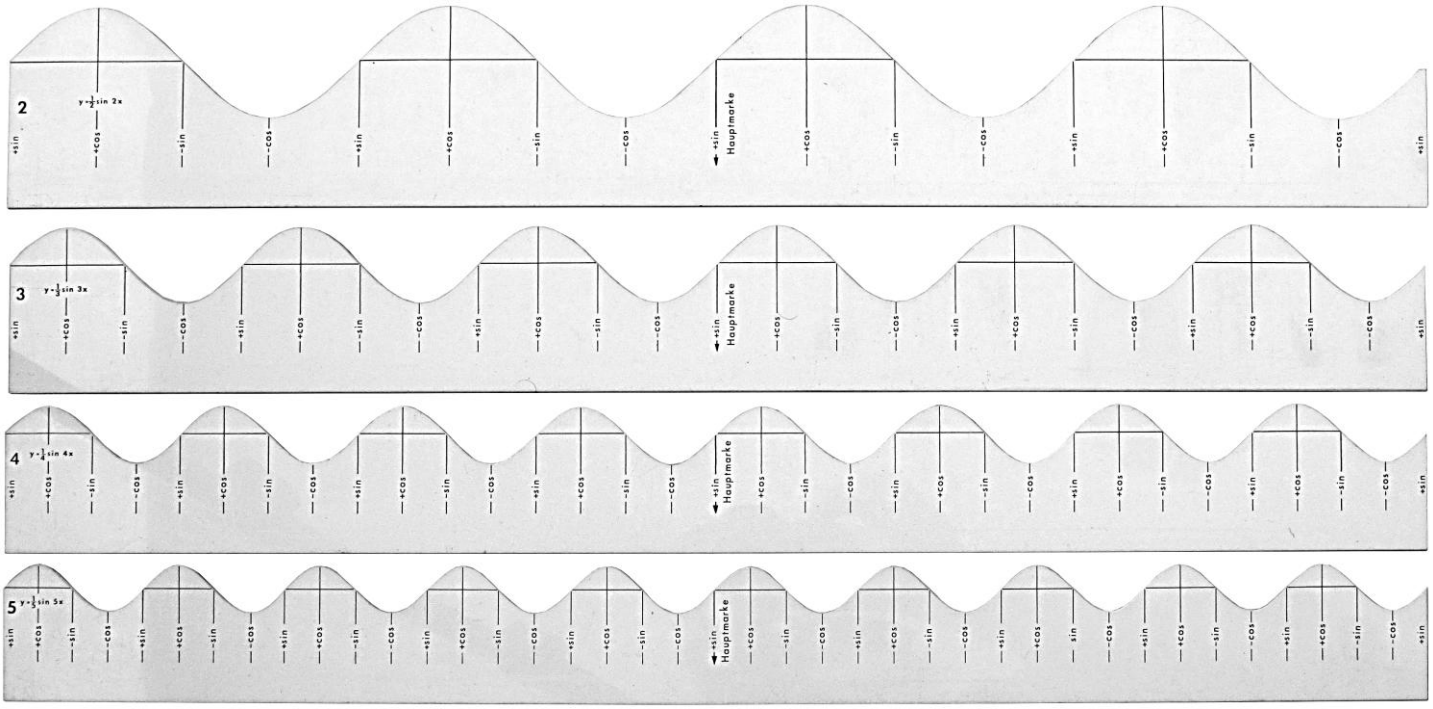
La plantilla 1 es un listón de madera de 65 × 2,3 × 0,5 cm, el denominado Listón Base, del cual ya he indicado su primera función al describir el Marco en "U". Uno de sus cantos longitudinales está achaflanado y lleva cerca la etiqueta «Unten», mientras que el otro, perpendicular, lleva la etiqueta «Oben».

Las plantillas 2 a 5 tienen el perfil superior según una onda sinusoidal, de acuerdo con las siguientes fórmulas (donde *x* se expresa en "unidades"):

Plantilla	Onda con fase 0	Onda con fase φ
2	$y = \frac{1}{2}$ sen 2x	$y = \frac{1}{2}$ sen (2x – 2φ)
3	$y = \frac{1}{3}$ sen 3x	$y = \frac{1}{3}$ sen (3x - 3φ)
4	$y = \frac{1}{4}$ sen 4x	$y = \frac{1}{4}$ sen (4x - 4φ)
5	$y = \frac{1}{5}$ sen 5x	$y = \frac{1}{5}$ sen (5x - 5φ)

Su longitud es de 63 cm, su grosor es de 0,3 cm y su altura depende de la onda sinusoidal integrada, siendo el mínimo de 4 cm (correspondiente a los picos negativos de cada onda sinusoidal).

Cada plantilla incluye marcas para cada pico y cada cruce por cero con una indicación de ±sen o ±cos para tener en cuenta los cambios de fase. La **Marca Central** (****Hauptmarke****) incorpora una flecha y sirve para centrar la plantilla con respecto a la Regla Inferior (fase 0). Así, antes de hacer descender el Panel de Lamas se desliza la plantilla alineando la Marca Central con un valor (fase φ) de la Regla Inferior, o bien, la flecha central de la Regla Inferior con cualquiera de las marcas de la plantilla. Cuando el Panel de Lamas desciende y se apoya sobre la plantilla, se obtiene la combinación de funciones.

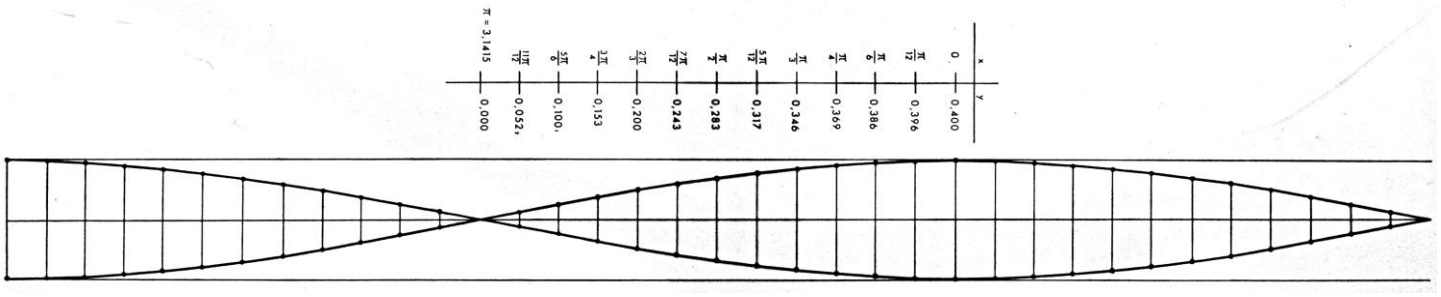




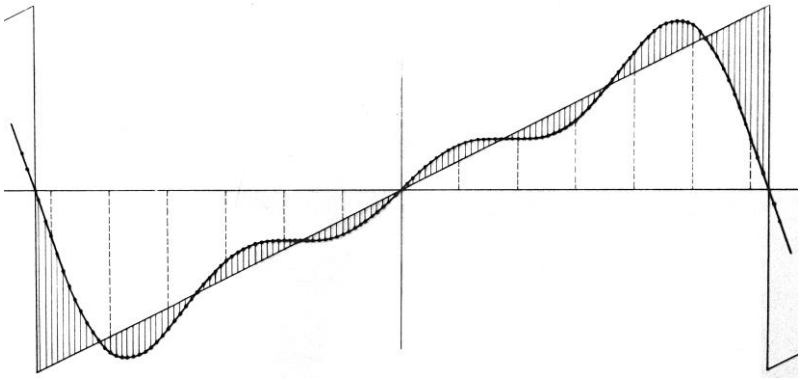
Cara A combinada con la Plantilla 2 (y = $\frac{1}{2}$ sen 2x). Se aprecia que a5 (y = sen x - $\frac{1}{2}$ sen 2x) se ha convertido en y = sen x

13 Elementos Auxiliares en el Instrumento

El aparato incluye, además, otros dos paneles de plástico transparente (a insertar en el cursor), cada uno con una función específica dibujada, para completar ejemplos concretos y facilitar su comprensión. Se denominan «Apéndices I y II».



El **Apéndice I** muestra un batido o una “oscilación modulada”. Esto ocurre al combinar a2 con la Plantilla 5.

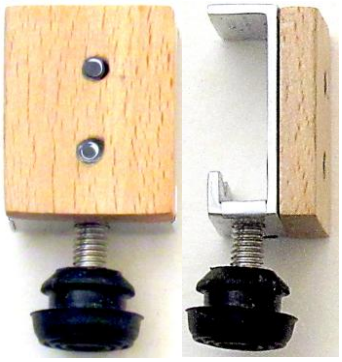


El **Apéndice II** combina a5 con la Plantilla 3 ($y = \text{sen } x - \frac{1}{2}\text{ sen } 2x + \frac{1}{3}\text{ sen } 3x$). Estos son los tres primeros términos de la serie de Fourier de una onda triangular. También se rayan las “desviaciones” respecto a la onda ideal.

El aparato incluye también dos **lápices**, uno **azul y** otro **rojo** (marcadores para vidrio A.W. Faber-Castell 2251), para dibujar sobre el Panel de Lamas o sobre cualquiera de los paneles de plástico transparente (fabricados en Astralon: Ventana de Coordenadas, Ventana Hiperbólica, Apéndice I y Apéndice II).



Como veremos más adelante, el Listón Base se puede posicionar inclinado según una de las reglas verticales por medio de una pequeña **abrazadera** (véase “Inclinando el Panel de Lamas” más adelante). Esta pieza faltaba en mi aparato, por lo que diseñé un sustituto.



Naturalmente, el aparato incluye la Parte A del manual de instrucciones.



14 Uso del Calculador de Funciones

14.1 Preparación del aparato para su uso

Una vez abierto el aparato y colocado en la orientación de trabajo deseada, es posible que el Panel de Lamas no muestre la cara que se necesita para trabajar con éste. Entonces hay que tomar las lamas por grupos, manteniendo su orden relativo, para irles dando la vuelta y que muestren la otra cara, hasta que la otra cada quede lista.

El siguiente paso será desmontar la Placa de Cierre. Primero hay que colocar el Listón Base (Plantilla 1) en posición horizontal sobre los Encajes Inferiores (prestando atención a las etiquetas «borde superior» [«Oben»] y «borde inferior» [«Unten»]). A continuación se pueden girar las lengüetas de la Placa de Cierre para irla retirando con cuidado, mientras se controla que el Panel de Lamas desciende hasta quedar apoyado sobre el Listón Base.

14.2 Inclinando el Panel de Lamas

Siempre que se quiera agregar una pendiente a las funciones mostradas en la Cara A o en la Cara B del Panel de Lamas, hay que coger un extremo del Listón Base que está en los Encajes Inferiores y fijarla a la pendiente respectiva (leída en las Escalas de Pendientes) con la ayuda de la Abrazadera.



Listón Base en los Encajes Inferiores (sin pendiente)



Listón Base con una inclinación de +0,7 (sobre la abrazadera)

Como se ve en la imagen de la derecha, el cursor está diseñado para pasar sobre el Listón Base. Dado que el Listón Base es más largo que el ancho de la caja, al levantar un extremo del Listón hay que asegurar que el otro extremo permanece apoyado sobre el Encaje Inferior correspondiente, y no en la pared lateral de la caja ni sobre la superficie de la mesa. Aunque quizá no se aprecie, la inclinación se mide bajo el borde inferior del Listón Base, estando el Encaje Inferior en el 0 y fijando la inclinación leyendo con el borde superior de la abrazadera.

14.3 Colocación en la Posición Superior

El uso de las plantillas 2 a 5 en el Combinador de Funciones empieza colocando el Panel de Lamas en la Posición Superior, empujando hacia arriba el Listón Base horizontal hasta que éste quede apoyado en los Encajes Superiores. Este posicionamiento se facilita gracias a que los Encajes Superiores son dientes que se retraen al interior de las reglas verticales mientras el Listón Base pasa por encima de ellos.



Esta posición permite la inserción de una de las plantillas 2 a 5, o incluso de la Placa de Cierre, para cerrar el dispositivo.

14.4 Uso del Cursor

Durante el uso de este aparato podrá ser necesario realizar mediciones sobre las ondas presentes en el Panel de Lamas. En primer lugar, se pueden trazar líneas horizontales (ejes) utilizando las reglas superior o inferior del cursor (con uno de los lápices). A continuación, desplazando adecuadamente el cursor (en sentido vertical) o la Ventana de Coordenadas (en sentido horizontal), podremos situar el origen de coordenadas. Una vez hecho esto, podremos medir lo que se necesite. Asimismo, es posible desplazar la Ventana Hiperbólica en sentido horizontal (sobre la Ventana de Coordenadas) para leer los parámetros requeridos (sobre el eje de coordenadas).

15 Suma de Funciones

15.1 Lineal y sinusoidal

Queremos combinar y = kx + C con una función en el Panel de Lamas (ya existente o dibujada manualmente). El valor de k puede ser positivo o negativo. Para ello utilizamos las Escalas de Pendiente. La escala de la izquierda corresponde a valores negativos de k, mientras que la de la derecha corresponde a valores positivos.

Tal como se ha explicado, basta con desplazar el extremo correspondiente del Listón Base hacia arriba (empujando el Panel de Lamas) y fijarlo mediante la Abrazadera. El borde inferior de dicho Listón es el que marca la pendiente, ya que la parte superior de los Encajes Inferiores marca el cero de las escalas. Por otro lado, los Encajes Superiores se sitúan en los puntos k = -0,5 y k = 0,5.

Por último, la inclusión de C supone desplazar la Ventana de Coordenadas, es decir, el origen de coordenadas hacia arriba (-C) o hacia abajo (C), de modo que la función correspondiente arroje el valor $y_0 = \pm C$ (para x = 0).

15.2 Sinusoidal y sinusoidal

Esto se logra añadiendo una de las plantillas 2 a 5 (o cualquier otra fabricada manualmente) en la Cara A. Para ello, primero se desplaza el Listón Base hacia arriba para empujar el Panel de Lamas hasta la Posición Superior. A continuación, se inserta la Plantilla escogida y se ajusta según la fase requerida. Por último, se hace descender el Panel de Lamas para que repose sobre la Plantilla, generando así la combinación, suma, en cada una de las ondas sinusoidales presentes en dicha cara.

Cabe señalar que el Listón Plano se desplaza sobre los laterales del Marco en “U”, mientras que las Plantillas 2 a 5 se insertan por debajo de sus reglas laterales. De este modo, la profundidad del Panel de Lamas permite intercambiar sus puntos de contacto del Listón Base al perfil superior de la Plantilla correspondiente, simplemente haciendo descender el Listón Base hasta que quede por debajo de dicho perfil (y las lamas se apoyen ya sobre la Plantilla), y viceversa.

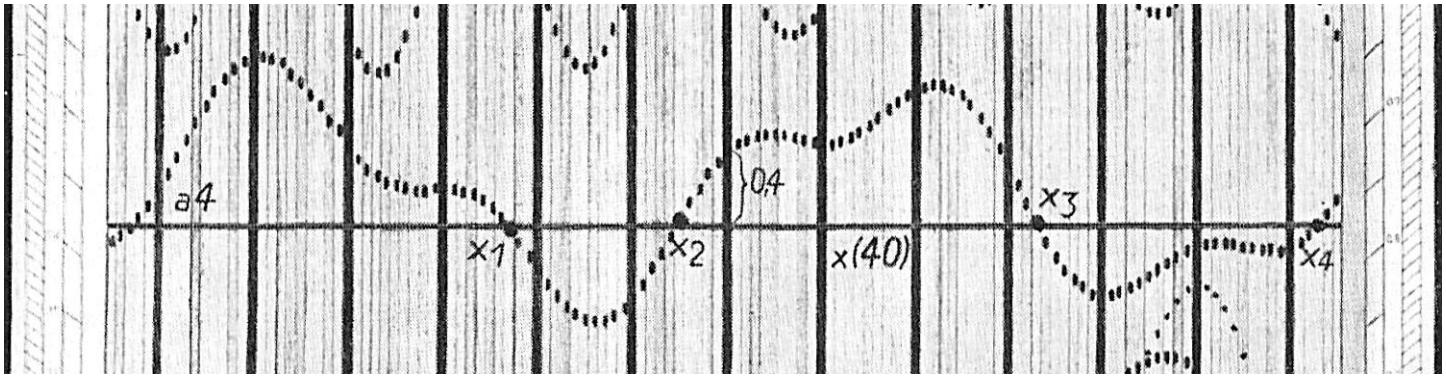
15.3 El Método del Negativo

Al combinar el Panel de Lamas con una Plantilla (de la 2 a la 5 o una hecha a mano), podemos trazar una línea horizontal en una zona despejada del Panel de Lamas (utilizando uno de los lápices). Entonces, si se con el Listón Base desplazamos el Panel de Lamas hacia la Posición Superior, dicha línea horizontal se habrá transformado en el negativo del perfil sinusoidal de la Plantilla empleada; o, dicho de otro modo, en la función de onda desplazada medio periodo.

En este sentido, si se desea sumar un par de ondas que no están dibujadas previamente en el Panel de Lamas, primero se dibuja una de ellas insertando la Plantilla correspondiente desplazada medio periodo y trazando una línea horizontal. A continuación, se puede sustituir dicha Plantilla por la que contiene la segunda onda, dejando que el conjunto de tiras se combine con ella. El resultado de la suma quedará representado por la línea recién trazada (que ahora adopta la forma de una onda resultante de la combinación deseada). Por supuesto, si no se dispone de una de las ondas en una Plantilla, solo hace falta empezar dibujando la primera onda punto a punto sobre el Panel de Lamas (o fabricando la Plantilla).

15.4 Ejemplo (número 40 en el manual): $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{5}\cos 5x + 0{,}2$

Sabemos que la onda a4 en la Cara A tiene la función $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x$. Entonces, añadiremos el segundo término insertando la Plantilla 5 desplazada de modo que la etiqueta “+cos” quede sobre el origen de la Regla Inferior (el 0 o la flecha negra). Por otro lado, en la función, cuando x = 0, $y_0 = 0 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$. Por tanto, ajustamos la Ventana de Coordenadas de manera que el valor de la nueva onda “combinada” a4 indique 0,4 para x = 0.



Detalle de la onda a4 combinada en la Figura 8 del manual, donde se ha trazado también el eje horizontal *x(40)*. El eje vertical *y* se corresponde con la lama oscura situada en el centro, en la que se indica el valor 0,4.

A partir de esta disposición podemos medir los puntos de la onda resultante. Esta es la tabla que aparece en el manual:

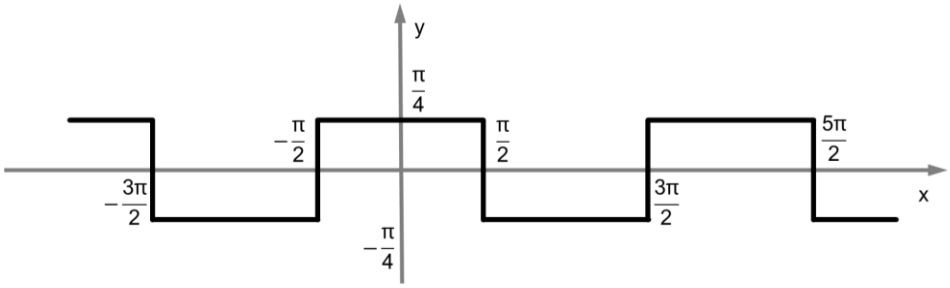
x	-2	-1,65	-1,5		-1,15	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5
y	0,4	0,2	0,2		0	-0,2	-0,4	0,02	0,4	0,5	0,45

x	1	1,15	1,5	1,65	2
y	0,7	0,75	0,34	0,04	-0,35

En las medidas vemos tres raíces de la función periódica: $x_1 = -1{,}15$; $x_2 \cong -0{,}25$; $x_3 \cong 1{,}65$

15.5 Generando una Serie de Fourier (ejemplo 58 del manual)

Queremos estudiar la serie de Fourier de una onda cuadrada con periodo 2π, amplitud $\pm \frac{\pi}{4}$, y que cambia su valor de amplitud cada $(2n\text{-}1) \cdot \frac{\pi}{2}$:



La serie de Fourier es: $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots$

Para generar la serie de Fourier como una onda gráfica, los pasos pueden ser:

1- Dibuja cos x en el Panel de Lamas (trazando sus puntos sobre éste, o con el método del negativo).
2- Coloca la Plantilla 3 en la posición "-cos" para añadir el segundo término.
3- Mide y anota los puntos de la onda resultante sobre el Panel de Lamas.
4- Retira la Plantilla 3 y dibuja la onda medida en el Panel de Bandas estando en la Posición Superior (tras haber borrado el trazado anterior).
5- Coloca la Plantilla 5 en la posición "+cos" para añadir el tercer término.
6- Mide y anota los puntos de la onda resultante.
7- Retira la Plantilla 5 y dibuja la onda medida en el Panel de Lamas estando en la Posición Superior (tras haber borrado el dibujo anterior).
8- Inserta la Plantilla correspondiente al cuarto término (generada manualmente) para añadirlo.
9- Mide y anota los puntos de la onda resultante.
10- Retira la Plantilla y…

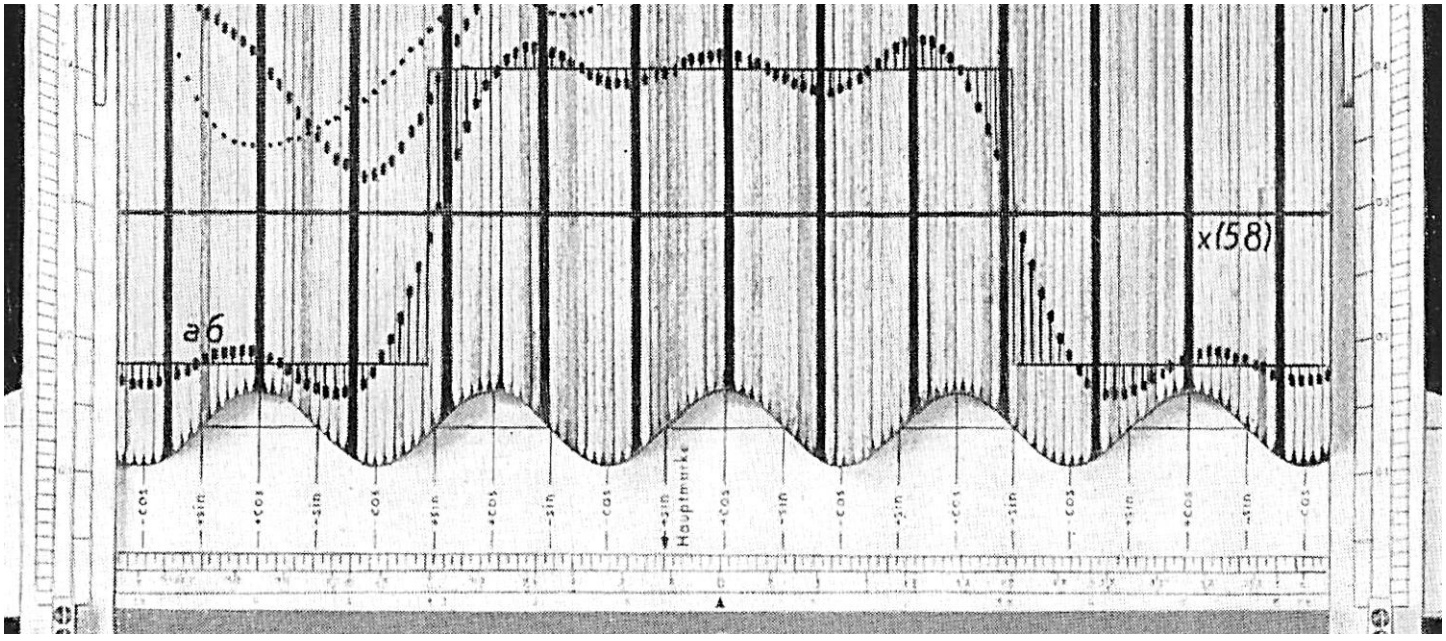
Los pasos 2, 3, 4 se repiten en 5, 6, 7, en 8, 9, 10, etc. Alternativamente, se puede hacer:

1- Coloca la Plantilla 3 debajo del Panel de Lamas, centrada en "+cos", y dibuja cos(x) sobre éste.
2- Desplaza el Panel de Lamas a la Posición Superior (sumando negativamente la onda de la Plantilla 3 a la función cos(x) recién dibujada).
3- Mide la onda resultante (anota el resultado). Retira la Plantilla 3.
4- Coloca la Plantilla 5 debajo del Panel de Lamas, a la altura de "-cos", y dibuja la onda que acabas de medir (tras haber borrado el dibujo anterior).
5- Desplaza el Panel de Lamas a la Posición Superior (sumando negativamente la onda de la Plantilla 5 a la onda recién dibujada).
6- Mide la onda resultante (anótala). Retira la Plantilla 5.
7- Coloca la Plantilla correspondiente al cuarto término (dibujada a mano) debajo del Panel de Lamas, en la posición "+cos", y dibuja la última onda medida (tras haber borrado el dibujo anterior).
8- Desplaza el Panel de Lamas a la Posición Superior (restando la onda de la Plantilla a la onda recién dibujada).
9- Mide la onda resultante (anótala). Retira la Plantilla.
10- Introduce la Plantilla…

De nuevo, los pasos 1, 2, 3 se repiten en 4, 5, 6, en 7, 8, 9, etc. Por tanto, ambos procesos son casi idénticos.

En cada medición, previamente se debe desplazar la Ventana de Coordenadas verticalmente para leer el valor y_0 correcto, para x = 0, (que se calculará cada vez: $(1 - \frac{1}{3})$; $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$; $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7})$; …)

Al igual que en el Apéndice II, que combina los tres primeros términos de la serie de Fourier de una onda triangular ($y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$), la combinación obtenida en cualquier iteración puede compararse con la onda cuadrada "ideal" para evaluar las "áreas de diferencias".



Detalle de la Figura 8 del manual, que muestra la onda resultante tras añadir tres términos de la serie de Fourier (aún con la Plantilla 5 incluyendo el tercer término) y el eje horizontal identificado como *x(58)*. También se señalan las "áreas de diferencias" respecto a la onda "ideal".

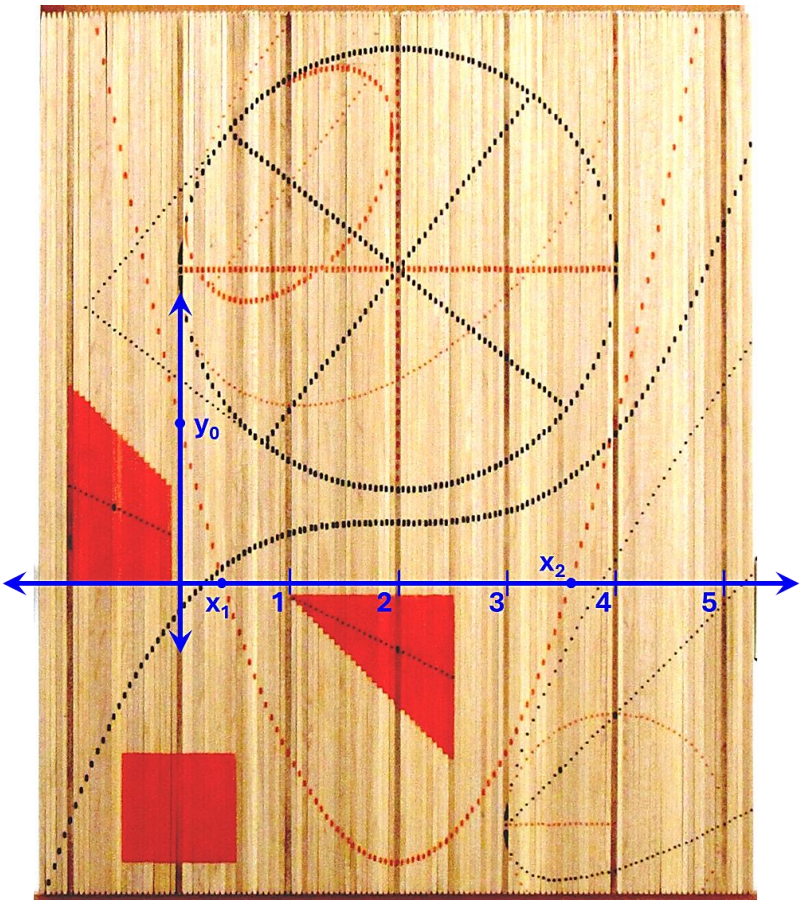
16 Determinación de las raíces de polinomios de segundo y tercer grado

16.1 Parábola

Tomemos $x^2 - 4x + 1{,}44 = 0$ (ejercicio 29 del manual). En la Cara B del Panel de Lamas tenemos la parábola $y = x^2$. Hay que desplazar el eje de coordenadas verticalmente de modo que $y_0 = 1{,}44$ y combinar la parábola con la función $y = -4x$; sin embargo, el valor 4 excede el rango k de las Escalas de Pendientes del Marco en "U" (que van de 0 a 1).

Alternativamente, a partir de ejercicios anteriores en el manual se llega a la conclusión de que la parábola afectada por el término ax conserva su forma original, tan solo desplazándose en sentido horizontal una distancia de $\frac{a}{2}$. Por tanto, debemos desplazar el sistema de ejes (la Ventana de Coordenadas) hacia la izquierda 2 unidades, además de verticalmente para que $y_0 = 1{,}44$.

Entonces, las raíces pueden medirse con la Ventana de Coordenadas: $x_1 = +0{,}4$; $x_2 = +3{,}6$.

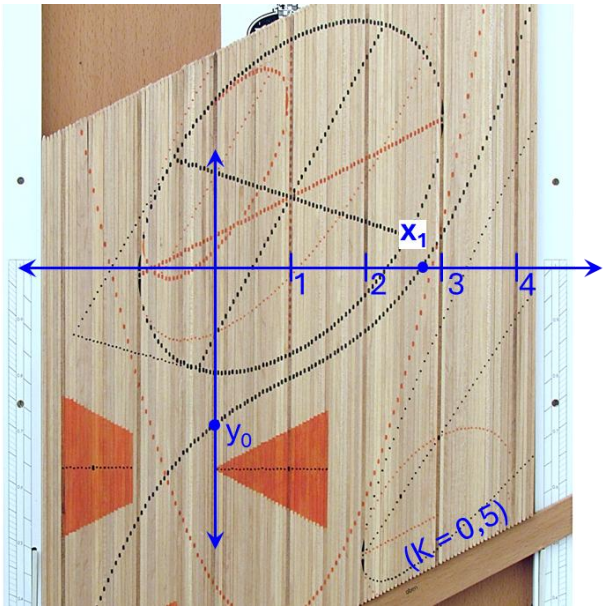


16.2 Polinomio de Tercer Grado

Para empezar, la función en el Panel de Lamas es $y = \frac{x^3}{10}$. Hay que tener en mente este factor 10 al leer valores de *y* con la Ventana de Coordenadas, pues habrá que dividirlos por 10. Sin embargo, esto no afecta al buscar raíces (y = 0).

Entonces, para representar $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, a la función ya existente el manual demuestra que habrá que añadirle la función $y = (b - \frac{a^2}{3})\cdot x$, y que el eje de coordenadas deberá desplazarse horizontalmente en $\frac{a}{3}$.

Tomemos el ejemplo 32 que pide calcular $x^3 - 3x^2 + 8x - 20 = 0$. Así, k = 8 – 3 = 5 (0,5 en el aparato), el desplazamiento horizontal será -1, y el desplazamiento vertical será tal que $y_0 = -20$ (-2 en el aparato). Esto nos permite leer la única raíz $x_1 = 2{,}75$, siendo x_2 y x_3 complejas.



16.3 Ajustes y Correcciones

Por supuesto, puede haber funciones en las que el valor calculado de k quede fuera del intervalo de 0 a 1, o en las que y_0 se sitúe más allá de la superficie de la Cara B. En tal caso, la propuesta consiste en sustituir x por $2\overline{x}$ o por $10\overline{x}$, y dividir la ecuación resultante por el factor respectivo. Una vez halladas las raíces, se realiza la conversión inversa de la variable.

Por ejemplo (38): $x^3 - 12x^2 + 400x - 4800 = 0$. Usamos $x = 10\overline{x}$, dividimos por 1000, y encontramos la raíz $\overline{x}_1 = 1{,}2$ siendo $\overline{x}_2$ y $\overline{x}_3$ complejas. Entonces, $x_1 = 12$ and $\overline{x}_2$ y $\overline{x}_3$ son complejas.

En cualquier caso, una vez determinada gráficamente una raíz, x_1, su valor puede utilizarse en la ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ para calcular el valor real de y_1 correspondiente, el cual podría no ser exactamente 0. Entonces, se podrá probar con un valor de *x* mayor o menor hasta conseguir un valor de *y* que presente el número de decimales deseado (0,0…).

17 Raíces de un Polinomio de 4º Grado

Queremos calcular $x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, pero no hay ninguna gráfica en el Panel de Lamas que se corresponda con una función de cuarto grado. Aún y así, en el manual se divide la función por (x + a), y se obtiene:

$$x^3 + b\,x + q + \frac{r}{x+a} = 0 \Rightarrow x^3 + b\,x + q = -\frac{r}{x+a}$$

Copiando directamente del manual:

Obtenemos así las raíces de la ecuación como las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

I .....$y = x^3 + b\,x + q$ (función de tercer grado)

II .....$y = \frac{-r}{x+a}$ (hipérbola equilátera)

La **función de tercer grado** se obtiene a partir de la curva b2 superponiendo Listón Base (con pendiente k = b) y ajustando el eje de coordenadas mediante un desplazamiento vertical: $y_0 = q$. Cabe señalar que la unidad de medida en la dirección y debe reducirse a una décima parte. Esto debe tenerse en cuenta tanto para la pendiente como para y_0 (en el ajuste del cursor). Por otro lado, no es necesario un desplazamiento horizontal de la Ventana de Coordenadas (a = 0); así que el eje *y* se sitúa siempre en la lama central.

La **hipérbola equilátera** será una de la familia de curvas de la Ventana Hiperbólica. Si esta placa se coloca sobre la Ventana de Coordenadas, la asíntota horizontal de la familia coincide con el eje *x* de la Ventana de Coordenadas, mientras que la otra asíntota se puede ajustar a una "fase" φ específica mediante las reglas superior o inferior del cursor. Como ya vimos, las hipérbolas en esta familia vienen dadas por la siguiente ecuación:

$$y = \frac{C}{x - \varphi}$$

El valor de C viene etiquetado para cada hipérbola. Por tanto, para nuestra ecuación, necesitamos la hipérbola con el factor C = -r, y ajustaremos la Ventana Hiperbólica según la fase φ = -a.

Notas:

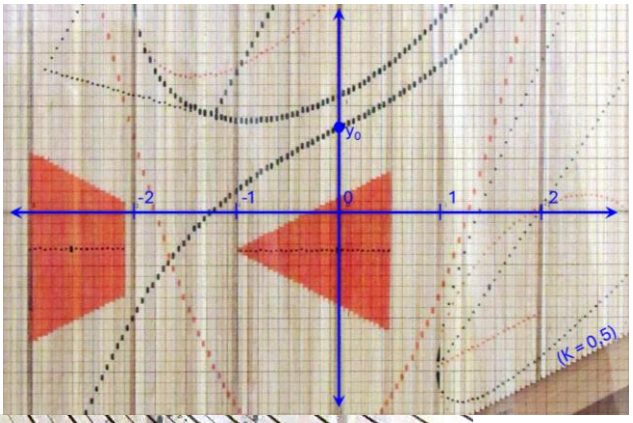
1. La Ventana Hiperbólica puede colocarse tanto para fases positivas como negativas, de modo que abarque todas las lamas (figuras 15b y 15a del manual). Además, cuenta con un doble etiquetado para poder utilizar ambos lados de la placa de plástico.
2. Al determinar los puntos de intersección, hay que considerar ambas ramas de la hipérbola (en el primer y tercer cuadrantes si el factor es positivo, y en el segundo y cuarto cuadrantes si el factor es negativo).

17.1 Ejemplo (77): $x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 13\,x - 2 = 0$

Dividiendo por (x + 1) llegamos a la equación $x^3 + 5\,x + 8 = \dfrac{10}{x + 1}$

Composición:

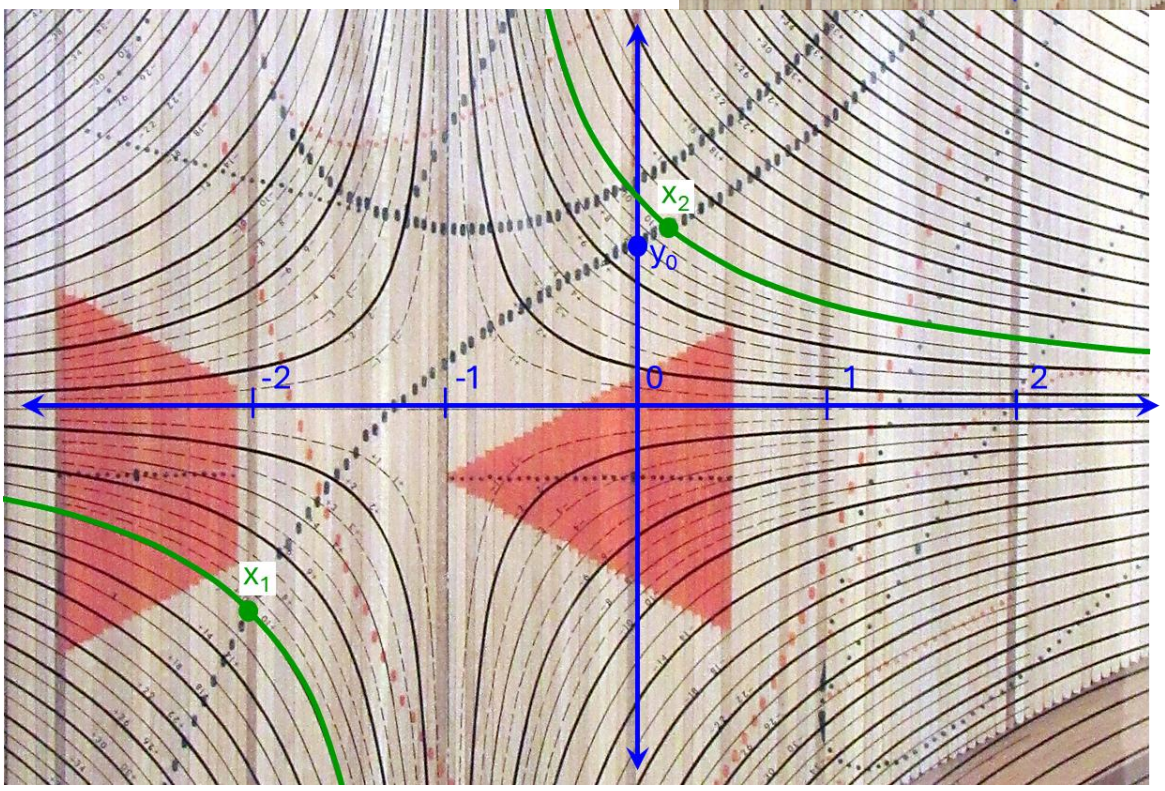
1. Listón Base: k = +5, que pasa a +0,5 en el aparato
2. Cursor: y_0 = +8, que pasa a +0,8 en el aparato
3. Ventana Hiperbólica: fase φ = -1
4. Factor de la hipérbola: C = 10



Las raíces son las abscisas de los puntos de intersección:

x_1 = -2; x_2 = 0,15; y ni x_3 ni x_4 son reales.

Si se necesitan más dígitos, se pueden buscar calculando con la ecuación de cuarto grado: x_1 = -2,00; x_2 = 0,145



17.2 Casos Especiales

Si la división por (x + a) es exacta, entonces la primera raíz es x_1 = -a y solo es necesario hallar las raíces de la función cúbica resultante.

Si la ecuación de cuarto grado carece de término cúbico, entonces la Ventana Hiperbólica no tiene fase (es decir, no hay desplazamiento horizontal).

Por supuesto, si la función no se ajusta al área de trabajo, siempre es posible realizar un cambio de variable ($x = 2\overline{x}$ o $x = 10\overline{x}$), seguido de una división por el factor correspondiente.

18 Comentarios Sobre el Aparato

18.1 Para la Comprensión de Funciones

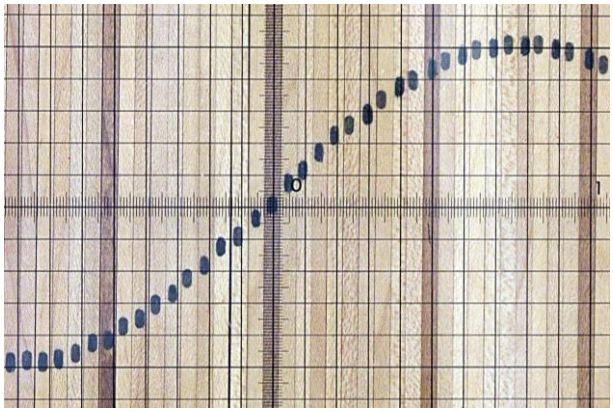
Considero que este instrumento debió resultar muy útil para comprender todos los conceptos relacionados con las oscilaciones y las ondas, e incluso para mostrar su "movilidad": su evolución con el tiempo, el cambio de fase en combinaciones, los armónicos... Y permite observar la mejora al añadir términos en una serie de Fourier.

Asimismo, las transformaciones geométricas explicadas en el manual dan una visión dinámica de las figuras geométricas, algo muy útil como preparación para un manejo más complejo de figuras tridimensionales (prismas, conos, esferas...).

18.2 Para Mediciones

Sin embargo, en mi opinión, el aparato resulta un tanto básico para hacer mediciones. El manual insiste en cuidar la correcta colocación de las lamas, asegurando que queden distribuidas de manera uniforme y evitando que se "amontonen" en algún punto (por ejemplo, al aplicar una inclinación o desplazamiento). El ancho de cada tira es de unos 0,25 cm; al haber 131 tiras, se obtiene una anchura total de unos 32,8 cm, que coincide con el ancho interior disponible en el Marco en "U". No obstante, en la práctica es posible apretar lateralmente el Panel de Lamas, dejando un espacio de unos 0,7 cm. Dicha holgura es necesaria para permitir el movimiento vertical de las lamas.

Esto podría compensarse mediante el hecho de que una de cada 10 lamas es más oscura (en la cara A; en la cara B, esto ocurre cada 20 lamas). De este modo, es posible comprobar y asegurar que las tiras 0, 10, 20… hasta la 60 (así como la -10, -20… hasta la -60) se correspondan con los valores 0, 0,5, 1… hasta 3 (y -0,5, -1… hasta -3) en las escalas horizontales (en el Marco en "U", en el cursor o en la Ventana de Coordenadas). Aun y así, seguimos teniendo el ancho de 0,25 cm de cada lama, o de los puntos marcados sobre ellas, lo cual dificulta la obtención de una medición más precisa.



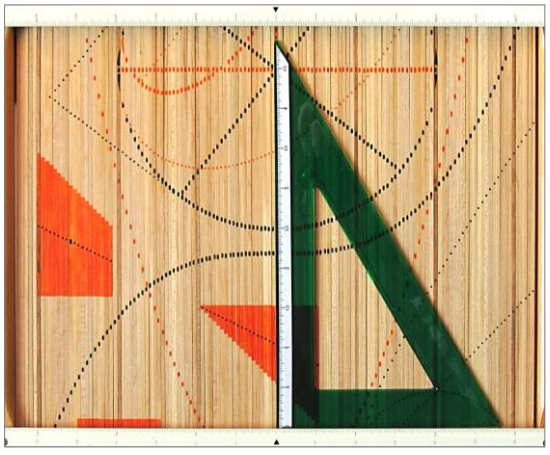
Detalle de una de las ondas en la Cara A del Panel de Lamas, y la Ventana de Coordenadas.

El manual ya hace referencia a la interpolación visual y a la corrección mediante cálculos directos usando la función, para obtener los decimales deseados. Sin embargo, cuando se pretende estudiar la combinación de varias funciones (al tener que medir y dibujar varias series de puntos), la pericia será fundamental y el tiempo requerido, considerable. No obstante, este tiempo "considerable" debería compararse con el que exigen otros métodos para mostrar las series de Fourier…

En cuanto al cálculo de raíces, también deberíamos comparar este aparato con los medios disponibles en aquella época (hasta la llegada de las calculadoras científicas programables).

Por último, este aparato fue diseñado para su uso en un aula; sin embargo, para leer o escribir cualquier valor es necesario estar muy cerca del mismo, lo que solo permite una trabajo en proximidad con entre uno y seis estudiantes, no más.

Por cierto, para dibujar funciones, echo en falta una regla graduada en "unidades" para situar los valores verticales, por ejemplo apoyada sobre la Regla Inferior, pues no se puede utilizar la Ventana de Coordenadas.



19 Bibliografía

[1] Faber Castell: „Funktionenschieber nach Dr. Th. Marzani, Demonstrations- und Rechengerät für den Unterricht und die wissenschaftliche und technische Arbeit“. Parte A. 1954

[2] Faber Castell: Carta de presentación del Catálogo de 1954, fechada el 22 de enero de 1954

https://www.sliderulemuseum.com/Archive/isrm_associates/hmd/Books/aanbiedingsbrief.pdf

[3] Faber Castell: “Rechenstab Brief” nº 14, páginas 22 a 26, de 1971.

https://www.yumpu.com/de/document/read/18571825/rechenstab-brief-slide-rule-museum/1

[4] P.Bender, W.Herget, HG.Wigand, T.Weth: Actas de „Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht“, páginas 43 y 44, de septiembre de 2002

https://www.yumpu.com/de/document/read/5385738/lehr-und-lernprogramme-fur-den-mathematikunterricht/45

Fin del Documento